LE NOMBRE AU PRIMAIRE (4)

Il était une fois...

Les algorithmes de calcul conventionnels des francophones d'Amérique sont en réalité des procédés permettant d'appliquer le principe de meilleure représentation.

Addition et multiplication

Dans ces opérations, la recherche de la meilleure représentation se manifeste par le besoin de **simplifier une disposition encombrée**.

Dans **234 + 567**, on obtient trop d'unités pour noter directement la somme. Il faut alors procéder à un échange qui augmente le nombre de dizaines, à tel point qu'il faudra ensuite effectuer un échange de dizaines. L'algorithme conventionnel permet d'exécuter efficacement les étapes conduisant à la meilleure représentation (en rouge) :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 \\ \hline & 8 & 0 & 1 \end{array}$$

En multiplication, un algorithme moins compact aide à visualiser la technique menant à la meilleure représentation. Pour **3 x 154,** on a **:**

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 5 & 4 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 3 & (15) & (12) \\ & 3 & (16) & 2 \\ & 4 & 6 & 2 \end{array}$$

Ce qui explique le sens du procédé conventionnel de multiplication, soit :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & 1 & 5 & 4 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 4 & 6 & 2 \end{array}$$

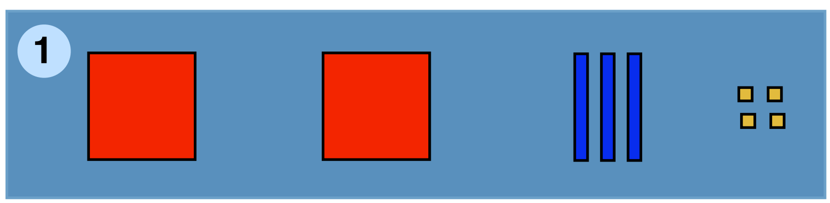
La « meilleure » représentation

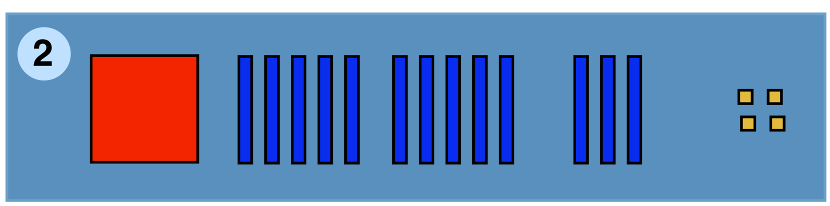
Le recours à une numération de forme solutionne le problème d'encombrement que crée la représentation d'ensembles comptant plusieurs centaines d'éléments. Ce procédé crée cependant un effet pervers puisque l'on perd de vue plusieurs éléments dénombrés. Cet effet atteint son maximum en soustraction et en division quand la représentation des nombres ne permet pas d'effectuer *directement* l'opération. Ainsi, la soustraction 6 789 – 1 234 apparaît « facile » puisque le nombre 6 789 compte suffisamment d'unités de chaque ordre pour effectuer les retraits. Par opposition, la soustraction 210 – 123 est beaucoup plus difficile à effectuer compte tenu des déficits aux dizaines et aux unités. La numération de forme entraîne alors l'émergence du principe d'équivalence.

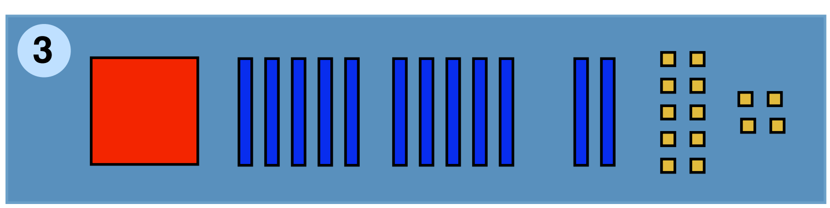
Principe d'équivalence
Dans tout système de numération, deux représentations d'un nombre sont égales s'il existe entre elles une suite finie d'échanges conformes aux définitions des unités de ce système.

Exemple 1

Voici trois représentations équivalentes du nombre 234. Le passage de l'une à l'autre s'explique par un échange conforme aux valeurs relatives attribuées aux blocs de base dix.







Il était une fois...

La soustraction et la division réclament une certaine forme d'*anticipation* dans la recherche de la meilleure représentation.

Soustraction

Pour effectuer **444 – 269,** le procédé conventionnel dissimule une suite d'échanges visant à transformer la représentation du nombre 444 pour permettre la soustraction des dizaines et des unités.

$$\begin{array}{rccc} & 3 & {}^{1}3 & \\ & \cancel{4} & \cancel{4} & {}^{1}4 \\ - & 2 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

Pour mieux visualiser ces échanges, recourons au compte rendu suivant :

$$\begin{array}{rccc} & 3 & (13) & (14) \\ & 4 & 3 & (14) \\ & 4 & 4 & 4 \\ - & 2 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

Division

Le procédé traditionnel de division est certes l'algorithme le plus hermétique. Son secret demeure cependant associé à la meilleure représentation.

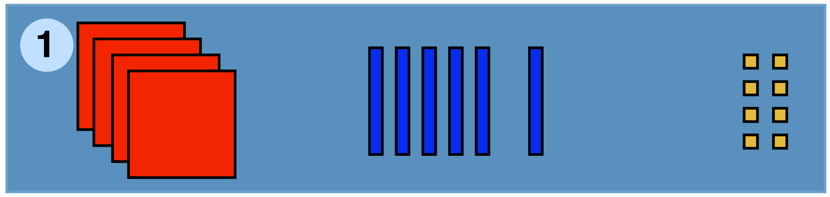
$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ \cline{4-4} 3 & & & 1\;4\;8 \\ \hline 1 & 4 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & 2 & 4 & \\ & 2 & 4 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

La suite d'échanges menant à la meilleure représentation est plus simplement illustrée ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ \cline{4-4} 3 & (14) & 4 & 1\;4\;8 \\ 3 & (12) & (24) & \end{array}$$

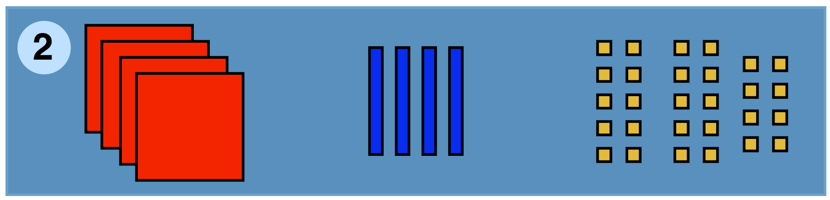
Exemple 2

Voici quatre représentations équivalentes du nombre **468.** Pour chacune, nous mentionnons un ou deux cas d'opérations pour lesquelles ces décompositions seraient les plus adaptées.



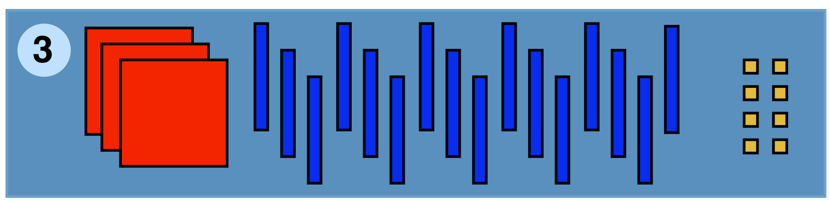
La représentation 1 est la meilleure s'il faut effectuer :

- **468 – 263** parce qu'il y a suffisamment d'unités de chaque ordre;
- **468 ÷ 2** parce qu'il y a partout des multiples de 2.



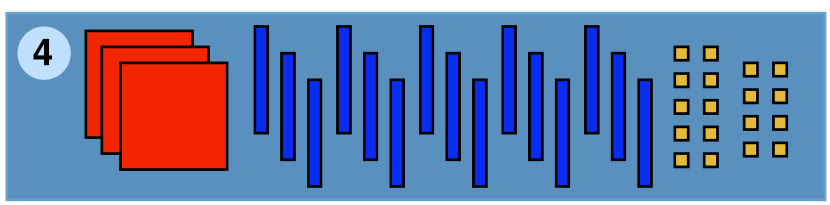
La représentation 2 est la meilleure s'il faut effectuer :

- **468 ÷ 4** parce qu'il y a partout des multiples de 4.



La représentation 3 est la meilleure s'il faut effectuer :

- **468 – 95** parce qu'il y a suffisamment d'unités de chaque ordre.



La représentation 4 est la meilleure s'il faut effectuer :

- **468 – 179** parce qu'il y a suffisamment d'unités de chaque ordre;
- **468 ÷ 3** parce qu'il y a partout des multiples de 3.

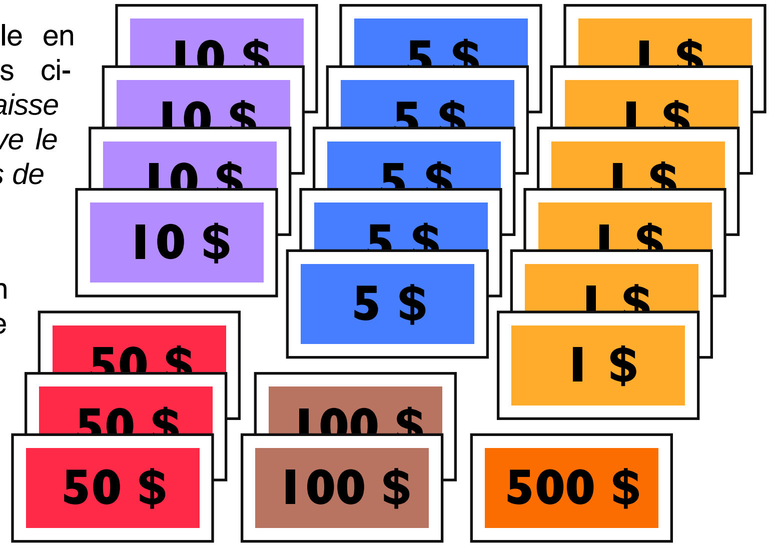
Meilleure représentation

La meilleure représentation d'un nombre dépend de l'opération dans laquelle il figure, et donc de ce que l'on désire faire avec ce nombre.

Scénario d'évaluation

Question 1

Utilisez de l'argent-jouet. Formez une pile en regroupant pêle-mêle les billets illustrés ci-contre : « *Voici l'argent contenu dans la caisse que tu as tenue lors d'une spectacle. Trouve le montant d'argent que tu as recueilli au cours de cette soirée.* »



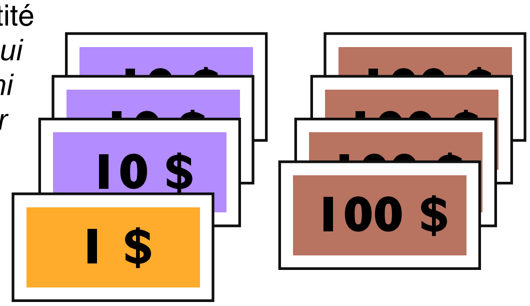
Pour montrer sa compétence, l'élève doit :

- classer ou associer les billets selon leur valeur (par opposition à un compte effectué en respectant l'ordre aléatoire dans lequel les billets ont été placés);
- compter juste (sans tenir compte des erreurs causées par la distraction).

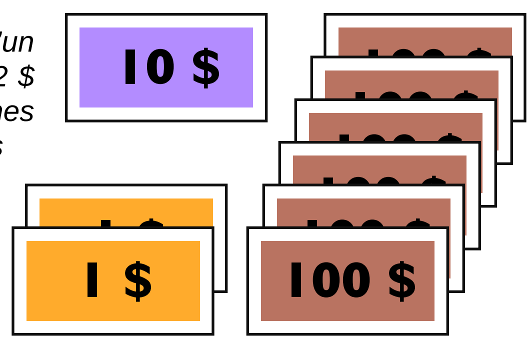
Question 2

Pour chacun des cas ci-dessous, l'élève ne dispose que de billets de 100 $, de 10 $ et de 1 $

- Sur la table, placez des piles de billets, en quantité suffisante. Remettez 431 $ à l'élève : « *Voici l'argent qui se trouve actuellement dans ton portefeuille. Ton ami désire vendre sa bicyclette et tu as accepté de payer 150 $ pour l'acquérir. Avec ces billets, il sera impossible de faire le paiement exact si ton ami n'a pas de monnaie. Fais les échanges qu'il faut pour rendre ton paiement facile.* »

  Si l'élève ne produit pas la meilleure représentation de 431 $, faites remarquer que des échanges ont été effectués inutilement : « Refais le travail en faisant le moins d'échanges possible. »
- **N'évaluez l'élève qu'à compter de maintenant.** Procédez exactement comme au cas précédent, mais cette fois-ci avec le cas 431 $ – 185 $.
- Remettez 612 $ à l'élève : « *Quatre propriétaires d'un kiosque de fruits et légumes ont réalisé un profit de 612 $ pour leurs ventes d'aujourd'hui. L'une de ces personnes doit passer à la banque pour faire quelques échanges qui faciliteront le partage des gains entre les propriétaires. Effectue ces échanges.* »

Solutions

Question 1	Il y a un montant de 921 $.
Question 2	Pour 431 $ – 150 $, il faut prendre : 3 x 100 $ + 13 x 10 $ + 1 x 1 $.
	Pour 431 $ – 185 $, il faut prendre : 3 x 100 $ + 12 x 10 $ + 11 x 1 $.
	Pour 612 $ ÷ 4, il faut prendre : 4 x 100 $ + 20 x 10 $ + 12 x 1 $.