LE NOMBRE AU PRIMAIRE (5)

Il était une fois...

Au petit musée du calcul humain, l'abaque occupe la place d'honneur. En effet, depuis deux millénaires, on retrouve cet instrument entre les mains des plus habiles comptables au monde. Les premiers abaques étaient tracés à même le sol. De simples cailloux occupaient alors les différentes positions pour représenter les nombres de plus en plus grands qui étaient requis pour les calculs courants. Le plus ancien boulier connu est une calculette romaine datant du 1er siècle de notre ère.

1 753 sur une calculette romaine

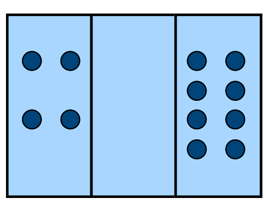
La numération écrite a connu un développement parallèle et parfois indépendant du calcul sur l'abaque. Ainsi, les Romains comptaient sur des abaques ayant une structure positionnelle de base dix, tandis qu'ils notaient les nombres au moyen d'une numération de forme (I, V, X, L, etc.). C'est dans les monastères de l'Inde du III^{e} siècle de notre ère qu'est née la numération moderne. En réconciliant les cailloux de l'abaque et la numération chiffrée, les moines indiens ont créé l'ultime système de numération. Leurs neuf chiffres tracés dans la poussière se sont alors enrichis du zéro, un signe qui permet de désigner chaque espace vide significatif sur l'abaque. Cette invention d'apparence insignifiante a alors littéralement révolutionné les mathématiques et toutes les sciences qui y recourent.

Passage à la numération de position

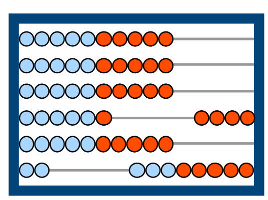
Le passage à la numération de position est de moindre complexité que le passage précédent, dans la mesure où l'élève maîtrise la numération de forme. Ce nouveau saut conceptuel vise surtout à *augmenter l'efficacité opératoire*. Ses conséquences sont cependant spectaculaires, puisqu'elles donnent éventuellement naissance à des procédés opératoires extrêmement performants. La numération de position s'impose donc comme un façon un peu plus abstraite de *faire comme si...* Les composantes essentielles de cette nouvelle étape dans l'évolution de la pensée numérique sont les suivantes :

1. *Toute numération de position implique une disposition graphique qui permet de juxtaposer différents éléments.*
2. *La valeur d'un élément dépend strictement de sa position.*
3. *Les caractéristiques fondamentales de la numération positionnelle moderne sont :*
   - *base dix, ce qui implique le recours à dix chiffres;*
   - *usage du zéro pour signaler les positions « vides »;*
   - *présence de l'addition par la juxtaposition des chiffres;*
   - *présence de la multiplication par la valeur de position.*

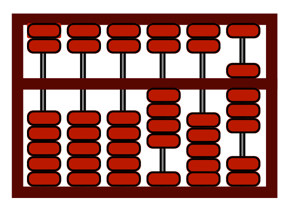
Le recours à divers types d'abaques est fortement recommandé pour permettre à l'élève de se donner une image mentale féconde de la numération. En effet, les gestes posés sur les abaques sont progressivement intériorisés, ce qui permet le développement du calcul efficace. Voici quelques types d'abaques affichant le nombre 408, chacun à sa façon.



Abaque primitif



Boulier européen



Boulier chinois

Sur un abaque, un espace vide peut prendre une signification importante. Aucune telle considération n'existe en numération de forme. Cette nouvelle réalité numérique est à l'origine de l'invention du zéro, solution incontournable quand des symboles juxtaposés servent à représenter des nombres. Ainsi :

$$48 \neq 408 \neq 4008$$

Scénario d'évaluation

Pour chacune des opérations de base, l'élève doit percevoir les liens de ressemblance existant entre son procédé et le même calcul effectué avec des billets d'argent-jouet (figure 1). **Les procédés utilisés par l'élève peuvent être écrits, concrets, ou mentaux, mais ils font cependant appel à la numération de position**. Pour chaque opération de base, nous allons illustrer ce qui est attendu par un exemple.

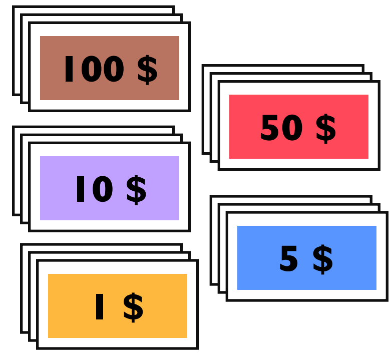


Figure 1

Addition : 198 + 349

1. L'élève effectue le calcul au moyen du procédé conventionnel (calcul écrit de la figure 2).
2. Demandez : « *Fais le même calcul en utilisant des billets.* »
3. Poursuivre : « *Dans le travail effectué avec les billets, à quoi correspond le petit 1 que tu as noté au-dessus du 9 ?* »
4. Ou encore : « *Explique comment tu as obtenu le 5 du résultat avec tes billets. En quoi cela ressemble-t-il à ton calcul écrit ?* »

L'élève associe clairement ses deux procédés.

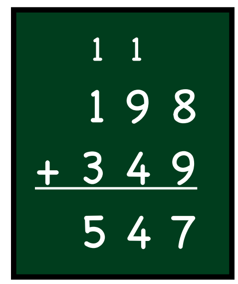


Figure 2

Soustraction : 512 – 189

1. L'élève utilise un procédé de calcul mental en effectuant :

   512 – 200 + 11 = 323
2. L'élève reproduit et explique le procédé avec les billets.

Multiplication : 157 x 3

1. L'élève effectue le calcul au moyen de sa superplanche (calcul concret) :
   - 3 jetons sont déposés à chacune des positions suivantes : 1 centaine, 5 dizaines et 7 unités (figure 3);
   - les échanges sont ensuite effectués pour obtenir 471.
2. Demandez : « *Fais le même calcul en utilisant des billets.* »
3. Poursuivre : « *Dans le travail effectué avec les billets, à quoi correspond la pile de 3 jetons que tu as déposée sur le 5 ?* »

L'élève associe clairement ses deux procédés.

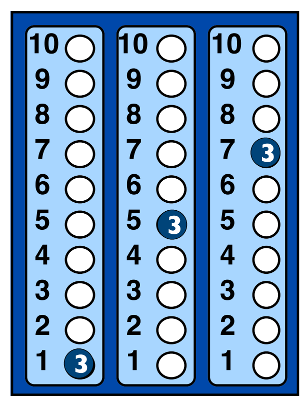


Figure 3

Division : 495 ÷ 3

1. L'élève effectue le calcul au moyen de sa planche à calcul (figure 4). La démarche met en évidence *la meilleure représentation de 495* dans ce cas, soit :

   3 centaines + 18 dizaines + 15 unités.
2. Demandez : « *Fais le même calcul en utilisant des billets.* »
3. Poursuivre : « *Avec les billets, as-tu aussi trouvé la meilleure représentation de 495 ? Quelle est-elle ?* »

L'élève perçoit le fort lien de ressemblance qui existe entre les deux supports de représentation utilisés pour effectuer la division demandée.

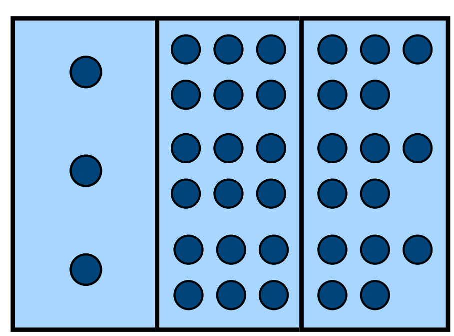


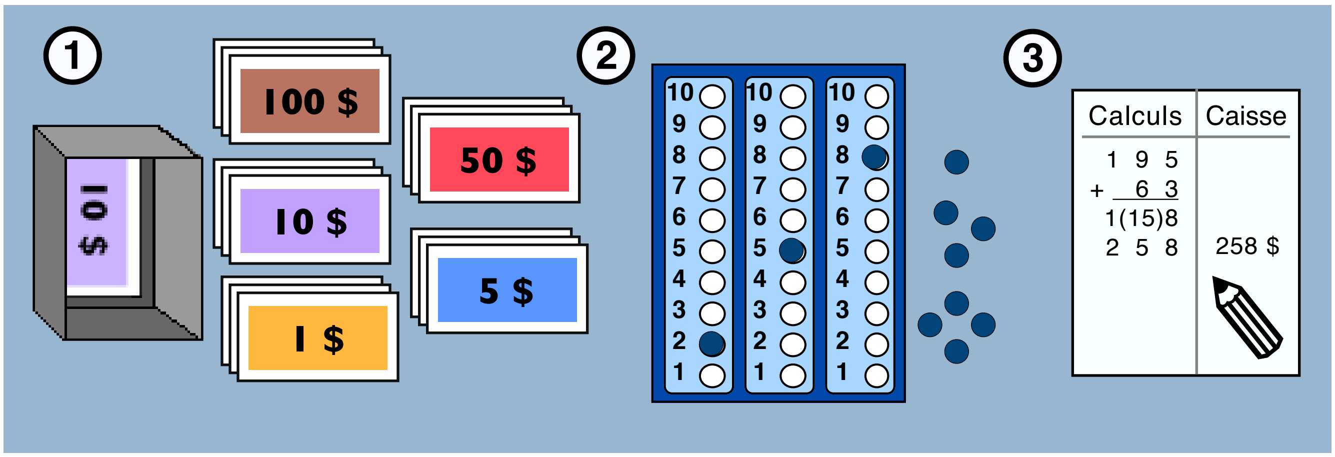
Figure 4

Quoi faire pour aider ?

Activité : Transactions parallèles

Faites appel à la capacité de l'élève de *faire comme si...* Il s'agit d'imaginer une boutique de vêtements. Des gens vont s'y arrêter pour faire divers achats. En collaboration avec l'élève, il faut effectuer les transactions (manipuler les billets), tenir la comptabilité (opérer sur la superplanche) et conserver les traces de toutes les transactions (garder trace des calculs).

Sur une table, installez trois postes de travail côte à côte, comme dans l'illustration ci-dessous. Le premier poste présente des billets d'argent-jouet et une boîte de carton (la caisse), le deuxième met une superplanche (la calculette) à notre disposition et le dernier présente une feuille de papier et un crayon (le livre de comptabilité).



1. L'élève s'assied au poste 1 et l'adulte au poste 2. Proposez une transaction réaliste (voir la note), par exemple : « *La première cliente achète un manteau valant 195 $ et un chapeau dont le prix est de 63 $.* » Chaque poste pourrait également être occupé par un élève, dans un atelier coopératif.
2. L'élève prend les billets qui représentent le prix de chaque article acheté par la cliente, effectue le calcul du montant total de cette vente et dépose le tout dans la caisse.
3. ***SIMULTANÉMENT, ET EN INSISTANT SUR LA SIMILITUDE DES GESTES***, l'adulte dispose les deux nombres sur la superplanche : « *Voici notre calculatrice à transactions. Tout ce que tu fais avec les billets, je vais systématiquement l'imiter sur la superplanche...* »
4. Quand le calcul sur la superplanche confirme le compte fait par l'élève avec les billets, proposez de noter le tout au poste 3, pour la tenue de livre de la boutique. Au début, les techniques écrites pourraient directement refléter les manipulations que vous venez de faire (voir l'exemple ci-dessus). Si l'élève connaît des algorithmes de calcul écrit, cherchez en quoi ces techniques ressemblent aux procédés concrets effectués aux deux autres postes.
5. Échangez les rôles pour permettre à l'élève d'occuper tous les postes de travail.

Note

Pour des situations de soustraction, inventez des cas de fournisseurs qui doivent être payés pour des livraisons de marchandises diverses; ces paiements sont faits à même la caisse. Pour des situations de division, on peut imaginer que le loyer à payer représente la moitié des ventes, que les profits de la caisse sont répartis entre trois ou quatre actionnaires, etc.