Les exposants : un rappel sur la signification des exposants et les lois des exposants.

Signification des exposants

- Exposant positif ex : $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

  Règle : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\,\text{fois}}$

- Exposant zéro ex : $3^0 = 1$ **Attention** : $-5^0 = -1$ mais $(-5)^0 = 1$

  Règle : $a^0 = 1$

- Exposant négatif ex : $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

  Règle : $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ **et** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- Exposant rationnel de forme $\frac{1}{n}$ ex : $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

  Règle : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

- Exposant rationnel de forme $\frac{m}{n}$ **ex 1:** $4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

  ou $4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$

  ex 2: $(27)^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

  Règle : $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ **ou** $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

- Exposant rationnel négatif ex 1 : $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

  ex 2 : $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

  Règle : $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$

Les lois des exposants

Loi #1 : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Lorsqu'on multiplie 2 puissances ayant même base, on garde la base et on ajoute les exposants.

Illustration

$$a^m \times a^n = \left(\underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{m\text{fois}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n\text{fois}}\right) = \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{m+n\text{fois}} = a^{m+n}$$

Exemples :

1) $5^3 \times 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$

2) $4^{-3} \times 4^8 = 4^{-3+8} = 4^5$

3) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$

Loi #2 : $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ou $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Lorsqu'on divise 2 puissances ayant même base, on garde la base et on soustrait les exposants.

Illustration :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{m\text{fois}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{fois}}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{(m-n)\text{fois}} = a^{m-n}$$

Exemples :

1) $6^5 \div 6^2 = 6^{5-2} = 6^3$

2) $3^4 \div 3^{-2} = 3^{4-(-2)} = 3^{4+2} = 3^6$

3) $\dfrac{5^{-3}}{5^{-2}} = 5^{-3-(-2)} = 5^{-3+2} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$ **ou**

$$\frac{5^{-3}}{5^{-2}} = \frac{\frac{1}{5^3}}{\frac{1}{5^2}} = \frac{1}{5^3} \times \frac{5^2}{1} = \frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

Remarque : $\dfrac{5^{-3}}{5^{-2}} = \dfrac{5^2}{5^3}$

4) $8^{-\frac{1}{2}} \div 8^{\frac{1}{4}} = \dfrac{8^{-\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{4}}} = 8^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 8^{-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}} = 8^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{8^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{8}\right)^3}$

Loi #3 : $\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m\times n}$ **Lorsqu'on élève une puissance à un exposant, on garde la base et on multiplie les exposants.**

Illustration :

$$\left(a^{m}\right)^{n} = \underbrace{a^{m}\times a^{m}\times a^{m}\times\cdots\times a^{m}}_{\text{nfois}} = a^{\overbrace{m+m+m+\cdots+m}^{\text{nfois}}} = a^{nm}$$

Exemples :

1) $\left(2^{3}\right)^{4} = 2^{3\times 4} = 2^{12} = 4096$

2) $\left(3^{-3}\right)^{2} = 3^{-3\times 2} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^{6}}$

3) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{3} = 5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}} = 5^{2} = 25$

Loi #4 : $\left(a\times b\right)^{n} = a^{n}\times b^{n}$ **Lorsqu'une base, étant un produit, est élevée à un exposant, chaque composante du produit est élevé à l'exposant.**

ou $\left(ab\right)^{n} = a^{n}b^{n}$

Illustration :

$$\left(ab\right)^{n} = \underbrace{ab\times ab\times ab\times\cdots\times ab}_{\text{nfois}} = \left(\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{\text{nfois}}\right)\left(\underbrace{b\times b\times b\times\cdots\times b}_{\text{nfois}}\right) = a^{n}b^{n}$$

Exemples :

1) $\left(2x\right)^{3} = 2^{3}x^{3} = 8x^{3}$

2) $\left(5x^{-3}y^{4}\right)^{-2} = 5^{-2}x^{(-3)(-2)}y^{4(-2)} = 5^{-2}x^{6}y^{-8} = \dfrac{x^{6}}{5^{2}y^{8}} = \dfrac{x^{6}}{25y^{8}}$

3) $\left(8a^{3}b^{6}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}a^{3\times\frac{1}{3}}b^{6\times\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}a^{1}b^{2} = \sqrt[3]{8}ab^{2}$

Loi #5 : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ **Lorsqu'une base, étant un quotient, est élevée à un exposant, chaque composante du quotient est élevé à l'exposant.**

Illustration : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{\text{nfois}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{\text{nfois}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{\text{nfois}}} = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples :

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

2) $\left(\frac{2x}{3}\right)^{-2} = \frac{(2x)^{-2}}{3^{-2}} = \frac{2^{-2}x^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2x^2} = \frac{9}{4x^2}$