dernier anniversaire (serait-ce le moins populaire?) est le 12 mars :

$$3{,}141592\ldots\ \underbrace{2307}_{\uparrow\ 63^{e}}\ \ldots\ \underbrace{2803}_{\uparrow\ 83^{e}}\ \ldots\ \underbrace{1706}_{\uparrow\ 95^{e}}\ \ldots$$

$$\underbrace{2306}_{\uparrow\ 114^{e}}\ \ldots\ldots\ldots\ \underbrace{1211}_{\uparrow\ 50288^{e}}\ \ldots\ \underbrace{1203}_{\uparrow\ 60872^{e}}$$

De même, on peut s'intéresser à trouver la séquence des sept chiffres du numéro de téléphone du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, soit le 643-6363. Effectivement, il apparaît deux fois avant la 30 000 000^{e} décimale :

$$3{,}141592\ldots\ \underbrace{6436363}_{\uparrow\ 19055835^{e}}\ \ldots\ \underbrace{6436363}_{\uparrow\ 29687975^{e}}$$

On doit également s'attendre à ce que le développement décimal de π contienne toutes les combinaisons gagnantes de la loterie 6/49, passées et à venir!

Le nombre π fascine les mathématiciens depuis au moins 4 000 ans et il n'a pas fini de nous intriguer. Tout au moins, l'obstination des chercheurs à élucider les mystères qui entourent ce nombre les aura amenés à développer sans cesse de nouvelles approches ou techniques, dont la plupart servent maintenant à étudier d'autres problèmes mathématiques.

En quelque sorte, l'étude du nombre π est à l'image de nombreuses recherches mathématiques : on a éclairci plusieurs de ses facettes, mais beaucoup de questions restent encore sans réponse.

M. Jean-Marie De Koninck est professeur au Département de mathématiques et de statistique et directeur du programme « Sciences et mathématiques en action » de l'Université Laval.

DERNIÈRE HEURE : Spectacle avec M. Jean-Marie De Koninck le 28 octobre 2005.
www.imagineinnovation.qc.ca

PROMENADE AU JARDIN DES NOMBRES

par Michel Aubé

Avis au lecteur : L'usage de la calculatrice est recommandé pour participer pleinement aux explorations proposées.[1]

À l'âge de 11 ans, j'ai quitté la Beauce de mon enfance pour emménager à Sainte-Foy, en banlieue de Québec. Cela a été, sur le coup, un exil douloureux de la campagne et de la forêt, où j'avais fait mes premières observations ornithologiques et où je promenais de jour en jour un regard émerveillé. Par bonheur, j'ai déniché un petit manuel de botanique, à la réalisation duquel avait collaboré le regretté Fernand Séguin. Je me souviens encore de la description de la Capselle bourse-à-pasteur, une petite fleur partout présente qui avait pourtant jusque-là échappé à mon regard. Je trouvais que son nom avait une belle sonorité et j'ai été captivé par les caractéristiques qui lui étaient associées. Atteignant à peine 50 cm de hauteur, un seul plant pouvait produire jusqu'à 50 000 graines, accumulées dans de petites bourses en forme de cœurs. Elle était par ailleurs connue depuis longtemps comme plante médicinale, et on lui attribuait des propriétés antihémorragique et cicatrisante, diurétique, anti-infectieuse et anti-inflammatoire. Cette « rencontre » a été le point de départ d'une exploration intensive de l'arrière-cour, qui recelait déjà quelques dizaines de surprises, mais aussi des champs avoisinants et du petit boisé qui jouxtait l'école. Je me rappelle encore avec émotion de la blessure vive des racines de Sang-dragon, du goût piquant du Gingembre sauvage, de l'odeur obsédante du Chou puant, de l'attitude discrète et recueillie de l'Ancolie ou du Petit prêcheur.

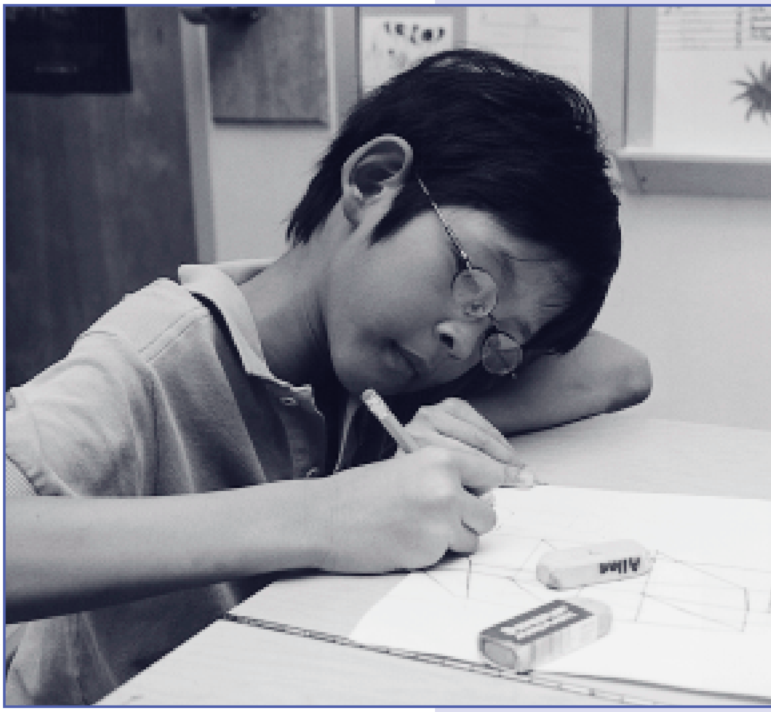


Photo : Denis Garon

Plus récemment, dans mes activités d'animation et d'encadrement du projet « Le monde de Darwin », je me suis mis à l'observation et à l'étude des petits poissons, que je connaissais moins bien que les autres vertébrés. Mes expéditions nocturnes dans les marécages avoisinants et mes captures de menés effectuées à quatre pattes dans les ruisseaux m'ont révélé cette fois encore l'univers fascinant du petit peuple qui habite ces écosystèmes. Qui connaît par exemple l'Umbre de vase, qui s'enfouit dans la boue de sa mare desséchée et respire comme d'un poumon par sa vessie natatoire fortement vascularisée, en attendant que la prochaine pluie remplisse à nouveau son petit aquarium personnel? Ou le Tête-de-boule, dont les cellules de la peau contiennent un « phéromone d'alarme », qui signale aux congénères d'éviter pendant plusieurs heures les zones patrouillées par un prédateur? Il s'agit de produits chimiques qui ne sont libérés dans l'eau ambiante que si l'animal est griffé, mordu ou déchiqueté. Ces phéromones agissent alors à la manière d'un véritable cri de terreur

« olfactif », qui déclenche aussitôt chez tous les membres de l'espèce qui se trouvent « à portée d'odorat » des comportements de fuite et de protection. Je me rappelle encore ce sentiment étrange et fascinant, au retour d'une balade en canot, où j'ai eu cette impression de glisser comme un témoin silencieux sur une fine pellicule à la frontière de deux mondes, contenant chacun leur complexité, leurs règles de survie et leurs mystères.

Ces moments de grâce n'apparaissent pas trop surprenants lorsqu'il est question de plantes ou d'animaux, mais il n'est pas habituel de les trouver également associés aux objets mathématiques. Or ces productions de l'esprit, tout comme les mots d'une langue, ont aussi leurs régularités et leurs bizarreries, et semblent parfois avoir leur vie propre. Dans les lignes qui suivent, j'aimerais ainsi convier le lecteur à une petite visite guidée au jardin des nombres. Comme pour les fleurs et les poissons mentionnés plus haut, il faut aller à leur rencontre et se prêter à une exploration attentive pour apercevoir tout ce qui y grouille déjà. Il faut surtout laisser au vestiaire sa crainte de ne pas tout saisir et prendre le temps de griffonner quelques exemples sur papier ou, mieux encore, de jouer un peu avec la calculatrice. J'ai d'ailleurs toujours encouragé son usage par les élèves. Plutôt qu'une prothèse pour compenser les faiblesses en matière de calcul mental, j'y vois une espèce de catalogue ou d'encyclopédie des nombres. C'est comme si ces derniers y avaient alors leur propre autonomie et qu'ils se « manifestaient » subrepticement, au gré des opérations qui les concernent ou les « appellent ». La calculatrice opère ainsi à la manière d'une paire de jumelles dans les mains de l'explorateur de nombres.

L'une des premières choses à réaliser est que les nombres, tout comme les mots, ont une morphologie particulière qui révèle parfois certaines de leurs propriétés. Dans le cas des mots de la langue française, par exemple, le *-s* final est souvent la marque du pluriel, le *-e*, celle du féminin, la terminaison *-ez*, l'indice que l'on peut être en présence d'un verbe à la deuxième personne du pluriel. Bien sûr, ces indicateurs n'obéissent pas à une règle absolue, car il existe d'autres cas où le pluriel, le féminin ou les personnes verbales ne sont pas marquées de cette façon. Une fois combinés à d'autres indices, ils forment cependant une structure globale et ils guident l'initié tels des repères sur un territoire.

Comme pour les signes du genre, du nombre ou de la conjugaison chez les mots, il est possible de savoir, par exemple, qu'un nombre est pair ou un multiple de 5 en considérant simplement le chiffre de ses unités[2]. Quant à reconnaître un multiple de 4, il faut d'abord s'assurer qu'il s'agit d'un nombre pair, puis effectuer un petit test additionnel : avec une terminaison de 2 ou de 6, le chiffre des dizaines *doit être impair* (comme pour 12, 16, 32 ou 56, mais non pour 26 ou 42); avec une terminaison de 0, de 4 ou de 8, il *doit être pair* (comme pour 24 ou 68, mais non pour 14 ou 38). La règle s'applique aussi avec les carrés pairs qui sont forcément des multiples de 4 (puisqu'il s'agit de deux multiples de 2 multipliés ensemble). Une exploration un peu plus poussée permet en outre de constater qu'un carré, en base 10, *ne se termine jamais par 2, 3, 7 ou 8*.

Les contraintes sont encore plus fortes si l'on considère les deux derniers chiffres des carrés. On peut ainsi observer que les mêmes terminaisons apparaissent en symétrie de chaque côté de 25 qui joue le rôle de pivot : les carrés de 24 et de 26 se terminent tous les deux par 76 avec un écart de 100 entre les deux, ceux de 23 et de 27 se terminent par 29 avec cette fois un écart de 200 entre les deux, ceux de 22 et de 28 se terminent par 84 avec un écart de 300 entre les deux, etc. La figure suivante illustre très clairement cette structure symétrique :

$21^2 = 4\,\boxed{41}$	$46^2 = 21\,\boxed{16}$
$22^2 = 4\,\boxed{84}$	$47^2 = 22\,\boxed{09}$
$23^2 = 5\,\boxed{29}$	$48^2 = 23\,\boxed{04}$
$24^2 = 5\,\boxed{76}$	$49^2 = 24\,\boxed{01}$
$25^2 = 6\,\boxed{25}$	$50^2 = 25\,\boxed{00}$
$26^2 = 6\,\boxed{76}$	$51^2 = 26\,\boxed{01}$
$27^2 = 7\,\boxed{29}$	$52^2 = 27\,\boxed{04}$
$28^2 = 7\,\boxed{84}$	$53^2 = 28\,\boxed{09}$
$29^2 = 8\,\boxed{41}$	$54^2 = 29\,\boxed{16}$

Le phénomène du pivot[3] est présent d'ailleurs à chaque multiple de 25. Ainsi, autour de 50, les carrés de 49 et de 51 se terminent de façon identique, de même que ceux de 48 et de 52, ceux de 47 et de 53, etc. La chose est intéressante, car, pour les deux derniers chiffres, il y a en principe 100 possibilités, de 00 à 99. Cependant, celles-ci sont réduites à 25, puisqu'elles sont dédoublées de chaque côté des pivots. En fait, on ne trouve que 22 terminaisons différentes, puisque les carrés de 5, de 15 et de 25 finissent tous par 25, et que ceux de 00, de 10 et de 20 se terminent par 00.

Or la mise en évidence de contraintes est la clé de la pensée scientifique, sinon de la pensée tout court : c'est précisément parce que le champ des possibles se trouve réduit par certains phénomènes qu'il est possible de formuler des lois, c'est ce qui permet de généraliser, de transférer, de prédire. Dans le cas des fins de carrés, les possibilités ne sont pas seulement réduites, mais également fortement structurées : outre les cas de 00 et de 25 (où les possibilités sont répétées une dizaine de fois chacune), chaque autre terminaison ne se trouve que quatre fois par centaine, et cela, à des positions bien précises. Ainsi, la terminaison 44 apparaît au carré de 12, mais aussi de 38 (= 50 - 12), de 62 (= 50 + 12), de 88 (= 100 - 12), etc.

L'énigme suivante illustre d'une autre façon l'intérêt qu'il peut y avoir à exploiter la morphologie de certains nombres. Il s'agit d'un petit problème de cryptarithmétique, où chaque lettre doit être remplacée par un chiffre, en respectant le sens de l'opération. Par convention, chaque chiffre doit être significatif, et un nombre ne peut débuter par 0 :

$$\begin{array}{r} aa \\ +\,bb \\ \hline cbc \end{array}$$

Que les lecteurs moins portés sur les mathématiques ne se dérobent pas trop rapidement, car le problème est beaucoup plus simple qu'il ne paraît au premier abord et peut même être résolu mentalement, à la condition de penser à exploiter la sorte de nombres que peuvent représenter *aa* ou *bb*. Ce sont des nombres familiers à la plupart des gens, comme 11, 22, 33, 44, etc., c'est-à-dire des multiples de 11. Leur somme doit donc être aussi un multiple de 11. Par ailleurs, *c*, qui ne peut valoir 0 par convention, doit provenir d'une retenue qui, en résultant de l'addition de deux chiffres, ne peut être que de 1. Bref, la somme *cbc* est un multiple de 11 à trois chiffres qui débute et se termine par 1 : il n'est pas trop difficile de trouver qu'il doit s'agir de 121, et qu'alors *b* vaut 2 et *a* vaut 9.

Plusieurs autres problèmes sur les nombres trouvent ainsi une solution facile lorsqu'on peut exploiter des connaissances à leur sujet, comme on le fait naturellement avec les mots. Par exemple, le suffixe *-able* dénote la capacité, comme dans *réalisable* ou *démontrable*, à tel point que l'on peut très bien comprendre la signification d'un mot nouveau ou même inexistant qui aurait cette forme, tel que *brisable* ou *collable*. Or, la forme des nombres révèle parfois aussi des propriétés intéressantes à leur sujet, comme on peut le constater dans le problème suivant : « Trouver un carré de la forme *aabb*. » Les connaissances que l'on vient de mentionner permettent d'en voir la solution assez rapidement, mentalement même, si l'on a su développer quelques réflexes à les appliquer. On peut d'abord dire que ce sera, ici aussi, un multiple de 11, puisqu'il résulte manifestement de l'addition de deux de ces multiples :

$$\begin{array}{r} aa00 \\ +\,bb \\ \hline aabb \end{array}$$

Ensuite, parmi les 22 terminaisons possibles à deux chiffres pour les carrés, les seules qui ont leurs chiffres identiques sont 00 et 44. Toutefois, ce ne peut être 00 ici, car si l'on divise deux carrés, on doit obtenir un autre carré. Or en divisant *aa00* par 100, on obtient *aa* qui ne peut être un carré (un multiple de 11 qui est un carré doit être un multiple de 121 et aura plus de deux chiffres). Les deux derniers chiffres doivent donc être 44, et puisque cette terminaison ne peut se trouver que quatre fois par centaine, cela signifie que *aabb* ne peut être que le carré de 12, de 38, de 62 ou de 88. Comme le dernier de la liste est le seul multiple de 11, la solution recherchée doit correspondre au carré de 88. Et comment le calculer mentalement? Il existe un truc simple pour élever au carré les nombres au voisinage de 100. Prenons 92, qui est à une distance de 8 de 100. Il suffit de soustraire cette distance de 92, puis de juxtaposer au résultat le carré de 8 :

$$\begin{array}{ccc} (92 - 8 = 84) & & (8 \times 8 = 64) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & 92^2 = 84\ 64 & \end{array}$$

Comme 88 est à une distance de 12 de 100, il faut faire ceci :

$$\begin{array}{ccc} (88 - 12 = 76) & & (12 \times 12 = 144) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \begin{array}{r} 76 \\ \underline{144} \\ 88^2 = 77\ 44 \end{array} & \end{array}$$

Dans ce cas, toutefois, le carré est de trois chiffres et il y a alors une retenue à prendre en compte. Le résultat obtenu est bien de la forme *aabb*, tel que cela est recherché. Cette stratégie pour élever au carré un nombre voisin de 100 opère également au-dessus de ce nombre, à la condition d'additionner l'écart au lieu de le soustraire. Pour le carré de 116, on aura donc :

$$\begin{array}{ccc} (116 + 16 = 132) & & (16 \times 16 = 256) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \begin{array}{r} 132 \\ \underline{256} \\ 116^2 = 13456 \end{array} & \end{array}$$

Le truc est généralisable pour les nombres au voisinage de 1 000 et permet d'englober une étendue d'autant plus grande autour de ce repère que l'on dispose mentalement d'une bonne table des carrés. Ainsi, pour l'utiliser dans le calcul du carré de 987, qui est à une distance de 13 de 1 000, il faut savoir que le carré de 13 est 169. On peut alors faire ceci[3] :

$$\begin{array}{ccc} (987 - 13 = 974) & & (13 \times 13 = 169) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & 987^2 = 974\ 169 & \end{array}$$

De telles configurations de nombres, aussi révélatrices, sont bien plus fréquentes qu'on ne le croit. J'ai ainsi été stupéfait lorsque j'ai appris, il y a plusieurs années, que les nombres de la forme *abcabc*, tels 123123 ou 765765, sont tous des multiples de 13. Pourquoi de 13? Je l'ai vérifié sur plusieurs cas, puis j'ai trouvé une explication en réalisant qu'ils sont tous des multiples de 1001, ce qui apparaît plus clairement à l'esprit quand on prononce ces nombres à haute voix : « 123 mille 123 ». Or le nombre 1001 est le produit de 7, 11 et 13. On aurait donc pu dire que les nombres de la forme *abcabc* sont également tous des multiples de 7 et de 11.

Pour des raisons semblables, les nombres de la forme *abab* sont des multiples de 101, et ceux de la forme *aaabbb*, de 37. Par ailleurs, les nombres symétriques (ou palindromes), tels 8998 et 425524, sont toujours des multiples de 11 *s'ils affichent un nombre pair de chiffres*. Cependant, ce n'est pas systématiquement le cas lorsque le nombre de chiffres est impair, comme on peut le constater avec 131 ou 989, bien qu'il existe des cas qui sont des multiples de 11, comme 121 ou 979.

J'ai mentionné plus haut les particularités des fins de carrés, mais j'aurais tout aussi bien pu examiner les propriétés d'autres puissances. Par exemple, les puissances quatrièmes des nombres qui ne sont pas des multiples de 5 n'ont que deux terminaisons possibles pour leur dernier chiffre, soit 6 ou 1, selon que le nombre est pair ou impair : $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, $4^4 = 256$, $7^4 = 2401$, etc. Pour ce qui est des multiples de 5, ils se terminent évidemment par 0 ou 5, selon que le nombre est pair ou impair. Par ailleurs, lorsqu'un nombre est élevé à la puissance cinquième, il retrouve le même chiffre d'unités qu'il affichait au départ : $2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $7^5 = 16807$, etc. Certains calculateurs prodiges ont d'ailleurs su en tirer un truc leur permettant de réaliser une performance spectaculaire pour les extractions de racine cinquième. D'autres particularités des puissances s'avèrent également intéressantes. Ainsi, le carré d'un nombre qui n'est pas déjà un multiple de 5 est toujours voisin immédiat (+1 ou -1) d'un tel multiple, ce qui signifie qu'il se terminera alors par 1, 4, 6 ou 9. Quant aux cubes, *lorsqu'ils ne sont pas déjà des multiples de 7 ou de 9*, ils sont toujours à une distance de plus ou moins 1 de ces multiples :

$$2^3 = 8 = (7 \times 1) + 1 = (9 \times 1) - 1$$
$$3^3 = 27 = (7 \times 4) - 1 = (9 \times 3) + 0$$
$$4^3 = 64 = (7 \times 9) + 1 = (9 \times 7) + 1$$
$$5^3 = 125 = (7 \times 18) - 1 = (9 \times 14) - 1$$

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de nombres entiers. Cependant, de jolies surprises nous attendent aussi du côté des nombres fractionnaires. Prenons, par exemple, la représentation décimale de 1/7 = 0,142857142857… etc. Il s'agit d'une fraction périodique où le nombre 142857 est répété à l'infini. Examinons cette période d'un peu plus près :

1/7 = 0,142857142857 …
2/7 = 0,285714285714 …
3/7 = 0,428571428571 …
4/7 = 0,571428571428 …
5/7 = 0,714285714285 …
6/7 = 0,857142857142 …

0,142 857
142 + 857 = 999

0,14 28 57
14 + 28 + 57 = 99

0,14 28 57…
x 2 x 2

Tout d'abord, chaque multiple de 1/7 affiche exactement les mêmes décimales, dans le même ordre, mais simplement décalées. Par ailleurs, si on sépare la période en deux moitiés, leur somme donne une suite de 9. C'est également le cas si on additionne les chiffres de la période par blocs de deux. Finalement, on peut remarquer que chaque bloc de deux décimales est doublé alors que l'on se déplace vers la droite, ce qui forme ainsi une suite. Le dernier terme n'a pas l'air exact (57 au lieu de 56), mais cela est simplement dû à la retenue provenant du fait qu'en doublant 56 on obtient un nombre à trois chiffres, 112.

La chose ne concerne toutefois pas que le nombre 1/7 et est largement répandue dans le monde des fractions décimales, comme permettent de le constater les figures suivantes à propos des multiples de 1/13. Dans ce cas également, la période est de six chiffres et l'on peut y reconnaître des régularités correspondant tout à fait à celles qui ont été relevées à propos des multiples de 1/7 :

1/13 = 0,076923076923 …
3/13 = 0,230769230769 …
4/13 = 0,307692307692 …
9/13 = 0,692307692307 …
10/13 = 0,769230769230 …
12/13 = 0,923076923076 …

0,076 923
076 + 923 = 999

0,07 69 23
07 + 69 + 23 = 99

0,69 23 07…
÷ 3 ÷ 3

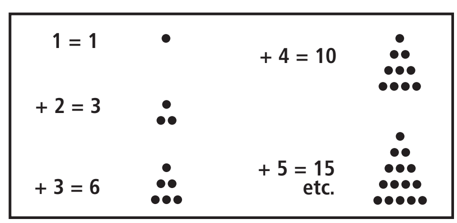
Deux remarques s'imposent ici. Tout d'abord, le décalage de la période semble ne s'appliquer que sur la moitié des multiples de 1/13, mais cela est dû au fait qu'il y a deux « représentations » différentes[4] pour la période des treizièmes, la seconde (0,153846…) se trouvant avec les multiples 2/13, 5/13, 6/13, 7/13, 8/13 et 11/13. Cependant, les mêmes phénomènes apparaissent à propos de l'autre représentation. La seconde remarque concerne la case inférieure droite où la suite affichant les blocs de deux décimales est cette fois *descendante* plutôt qu'ascendante, et où chaque nouveau bloc est *le tiers* du précédent. Elle est illustrée à partir de la fraction 9/13 parce que la chose y est plus apparente, mais, comme il s'agit toujours des mêmes décimales simplement décalées, il est bien évident qu'elle s'applique aussi aux autres multiples de la fraction.

Le fait de reconnaître des suites géométriques dans le déploiement des décimales d'une fraction est un phénomène général directement associé aux propriétés des nombres rationnels. Ces suites ressortent avec une évidence particulière dans les cas suivants :

1/81 = 0,0 1 2 3 4 5 6 7 9 …
1/98 = 0,01 02 04 08 16 32 …
1/97 = 0,01 03 09 27 …
1/96 = 0,01 04 16 66 66 …

Petites questions pour l'explorateur de nombres : Où est passé le 8 dans l'expansion décimale de la fraction 1/81? Pourquoi la suite de 1/96 se brise-t-elle si rapidement? Peut-on trouver facilement une fraction qui affiche, au moins en partie, une suite donnée?

On réalise rapidement le foisonnement de bizarreries et de régularités qui peuplent le monde des nombres et qu'une exploration attentive peut mettre au jour. D'ailleurs, cette activité a été intensément pratiquée par de grands mathématiciens comme Gauss et Euler, ce qui a sans doute contribué au développement formidable de leurs compétences dans ce domaine. Pour ces penseurs, les nombres ont une individualité particulière, et l'on rapporte que le grand mathématicien indien Ramanujan affirmait « connaître les nombres personnellement », un peu à la façon dont on connaît son réseau d'amis ou comme un biologiste connaît les mœurs des animaux habitant les écosystèmes qu'il étudie. Toutefois, que savons-nous au juste des nombres qui « vivent » dans notre cerveau? Que peut-on dire, par exemple, d'un nombre apparemment aussi simple que 6, outre qu'il est le produit de 2 et 3 et qu'il est positionné entre 5 et 7? Or il affiche plusieurs propriétés intéressantes. C'est d'abord un nombre triangulaire, qui peut se disposer sous la forme d'un triangle de points, comme c'est le cas pour 10, que l'on voit dans un jeu de quilles, ou pour 15, le nombre de boules de billards rassemblées en triangle au départ du jeu. Tous ces nombres correspondent à la somme d'une suite d'entiers successifs à partir de 1 :



Cependant, le nombre 6 est aussi un nombre hexagonal (qui peut se disposer sous la forme d'un hexagone de points), un nombre rectangulaire d'ordre un (qui peut se disposer sous la forme d'un rectangle dont la longueur vaut un de plus que la largeur), un nombre factoriel (6! = 1 x 2 x 3) et un nombre parfait. Cette dernière catégorie était déjà connue dans l'Antiquité, mais elle soulève encore de nos jours de fructueuses interrogations en théorie des nombres. Il s'agit d'un nombre égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même : le premier est 6 (= 1 + 2 + 3); le deuxième est 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14); le troisième, 496; le quatrième, 8128; etc. Pour le moment, on sait, entre autres choses, que ces nombres ne sont jamais des carrés, que ceux qui sont pairs sont tous triangulaires et qu'ils sont alors étroitement liés aux puissances de 2 et à certains nombres premiers. Toutefois, on ne sait toujours pas avec certitude s'il y en a une infinité, et surtout si certains sont impairs.

Voilà beaucoup de propriétés pour un seul nombre, et il en existe probablement d'autres. Déjà plusieurs d'entre elles ont eu un impact important sur le développement des connaissances mathématiques. Et le monde des nombres foisonne de ces « personnalités étranges », à tel point que l'on pourrait avec intérêt produire des fiches sur les nombres et leurs propriétés, comme on le fait pour la description des espèces vivantes et de leur écologie. Ainsi, on n'a encore rien dit dans le présent texte du nombre 0, dont l'invention a pourtant été si féconde pour l'évolution de la pensée humaine, de π (voir l'article de J.-M. De Koninck à ce sujet), de *phi* (le fameux nombre d'or), du nombre *e*, souvent évoqué dans les fonctions exponentielles et en théorie des probabilités, ou du nombre imaginaire *i*. On a à peine indiqué les suites à propos du développement décimal des fractions, on n'a rien fait connaître de la célèbre suite de Fibonacci…[5]

Au terme de cette promenade, que tirer des observations recueillies? Ne s'agit-il que de phénomènes futiles ou simplement amusants? Quel rapport peut-on établir avec le développement de la pensée mathématique et la formation des jeunes? Une idée importante est que la pensée, mathématique ou autre, ne se développe pas simplement sur un mode utilitaire. La curiosité qui est éveillée à l'exploration de la faune ou de la flore est intéressante en elle-même, indépendamment de l'utilisation particulière que l'on fera des connaissances. Elle est mise en branle par l'expérience même de la régularité, de la symétrie ou de l'inattendu, elle place l'esprit dans un état de disponibilité attentive, stimule la recherche et appelle à l'inférence et

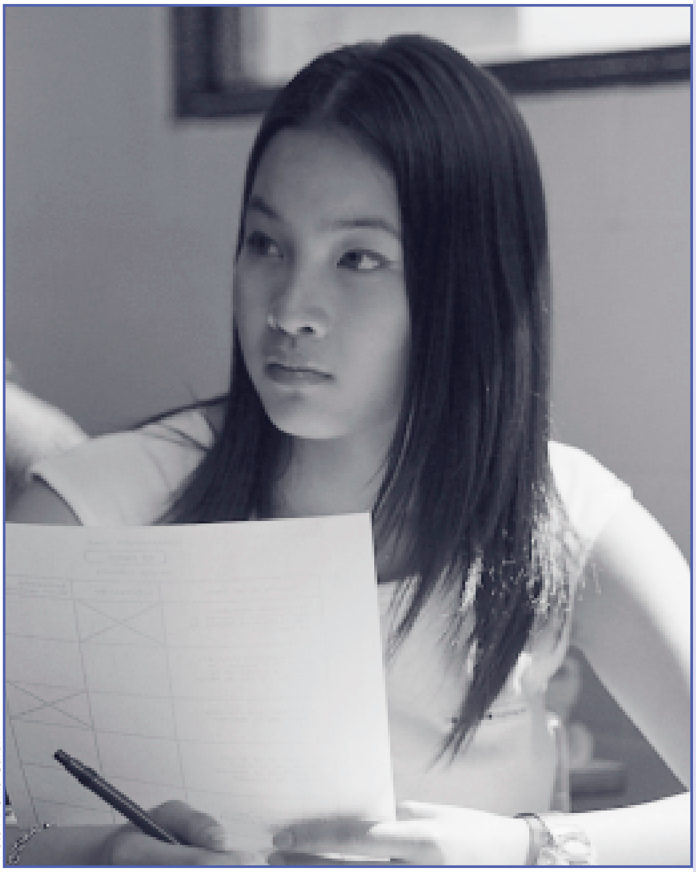


Photo : Denis Garon

au raisonnement analogique. Et l'exploration des phénomènes mentaux, qu'il s'agisse de nos processus de perception et de mémoire, ou des productions abstraites que sont les mots, les symboles ou les nombres, procède de la même logique.

Comme êtres vivants, nous avons été fabriqués à travers notre histoire évolutive pour reconnaître du vivant, et les productions mentales en portent la marque. Les nombres et les mots ont en effet certaines des caractéristiques du monde vivant : ils croissent, se combinent et se développent, ils produisent d'autres mots et d'autres nombres. Certes ils n'ont pas l'autonomie des plantes ou des animaux. Mais, un peu à la manière des virus, une fois qu'ils ont trouvé place dans un cerveau, ils y prennent vie, y trouvent les ressources requises à leur dynamisme, s'y propagent puis se transmettent d'un esprit à l'autre. Dans cette « numéroculture », certains cerveaux sont plus accueillants que d'autres, et les nombres leur apparaissent aussi plus familiers. Pour mieux connaître les objets mathématiques, nous devons donc leur cultiver une place dans notre esprit, une sorte d'écosystème favorable, tels ceux que nous aménageons pour les plantes ou les animaux que nous souhaitons voir croître et cohabiter avec nous. Il faut les visiter, les nourrir et les mettre en contact avec leurs congénères qui peuplent les cerveaux de nos propres congénères. Et comme nos animaux de compagnie, comme les plantes de notre jardin ou comme les oiseaux qui visitent nos mangeoires, ils nous le rendent bien, en perpétuant sous nos regards ébahis les surprises et les multiples recombinaisons si caractéristiques de la vie!

M. Michel Aubé est professeur titulaire à la Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke.

---

1. Cet article illustre bien le propos énoncé dans le texte du même auteur dans le n° 135 (avril-mai 2005), intitulé *Curieuse curiosité*.
2. Cet énoncé n'est toutefois vrai qu'en base 10. Cela repose sur le fait que 2 et 5 sont des diviseurs de la base. En base 12, par exemple, le chiffre des unités permettrait de savoir aussitôt si le nombre est divisible par l'un ou l'autre des diviseurs 2, 3, 4, 6 et 12.
3. La plupart des phénomènes présentés dans l'article peuvent être expliqués en utilisant simplement les règles de l'algèbre enseignées au secondaire. Cela peut offrir d'intéressants défis aux élèves... comme à leurs enseignants!
4. Au voisinage de 1 000, on juxtapose toutefois des blocs de trois chiffres (au lieu de deux comme avec 100), ce qui fait qu'il n'y aura pas de problème de retenue tant que le carré de la distance à 1 000 donnera un nombre inférieur à quatre chiffres.
5. Pour ceux qui aiment les défis mathématiques, dans la forme décimale de toute fraction *1/p* où *p* est premier, il existe un lien étroit entre le dénominateur, le nombre de chiffres de la période et le nombre de représentations de la période.
6. Pour les curieux, le déploiement des décimales de 1/9899 affiche par blocs de deux chiffres plusieurs nombres de la suite de Fibonacci, du moins jusqu'à ce que les retenues dues aux termes à plus de deux chiffres en brisent l'apparence…